**Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Τμήμα Μαθηματικών, Διδάσκων: Ιωάννης Γιαννούλης**

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙΙ**

**29 Ιανουαρίου 2020**

**Θέμα 1. [0.5]** Δείξτε ότι κάθε (μη κενό) σύνολο στάθμης μιας συνεχούς πραγματικής συνάρτησης, η οποία ορίζεται σε ολόκληρο το $\mathbb{R}^n$, είναι κλειστό.

**Θέμα 2. [0.5+0.5]** Έστω $\bar{f}, \bar{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμες. Δείξτε ότι

(α΄) η $\bar{f} \cdot \bar{g}$ είναι συνεχής,

(β΄) η $\bar{f} + \bar{g}$ είναι διαφορίσιμη. Δώστε την παράγωγό της.

**Θέμα 3. [1.5]** Έστω η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,x) = x^2$ και $f(x,y) = 0$ για $x \neq y$. Σε κάθε σημείο $(x_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$, εξετάστε αν η $f$ είναι διαφορίσιμη ή/και συνεχής και βρείτε σε κάθε ένα από τα σημεία αυτά όλες τις κατευθύνσεις για τις οποίες έχει παράγωγο κατά κατεύθυνση.

**Θέμα 4. [4×0.5]** Έστω $f(x,y) = e^{-xy}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(α΄) Περιγράψτε ως γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής την καμπύλη $L_f(1/e)$ στάθμης $1/e$ της $f$.

(β΄) Βρείτε όλα τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f$ και χαρακτηρίστε τα.

(γ΄) Δώστε το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(0,0,1)$ του γραφήματος της $f$.

(δ΄) Αν βρίσκεστε στο σημείο $(1,1,1/e)$ του γραφήματος της $f$ («επιφάνεια ενός βουνού»), προς ποιά κατεύθυνση στον $\mathbb{R}^2$ («διδιάστατος χάρτης») θα βρίσκεται η πιο απότομη «ανηφόρα»;

**Θέμα 5. [1.5]** Έστω $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = \begin{cases} xy, & y > 0, \\ 1/2, & y \leq 0, \end{cases}$.
Βρείτε και χαρακτηρίστε όλα τα τοπικά και ολικά ακρότατα της $f$.

**Θέμα 6. [1]** Για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ορίζουμε $u(x,y) := v(\xi, \eta)$ με $\xi = x - y$, $\eta = x + y$ και $v \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Δείξτε ότι $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ και

$$u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y) = 4v_{\xi\eta}(x-y, x+y) \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ποια τιμή παίρνει αυτή η συνάρτηση αν $v(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta)$ με $f, g \in C^2(\mathbb{R})$;

**Θέμα 7. [0.5+0.5]**

(α΄) Έστω $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ με $F(x_0, y_0) = 0$ και $\frac{\partial F}{\partial_y}(x_0, y_0) \neq 0$. Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο $(x_0, y_0)$ του γραφήματος της συνάρτησης $y = g(x)$ (η οποία $g$ ορίζεται μοναδικά κοντά στο $x_0$, είναι συνεχώς διαφορίσιμη και ικανοποιεί την εξίσωση $F(x, g(x)) = 0$) είναι κάθετη στην κλίση της $F$ στο σημείο $(x_0, y_0)$.

(β΄) Έστω η απεικόνιση $(x,y) \mapsto (u,v)$ για $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $x \neq 0$ και $\begin{cases} u = \frac{x^2+y^2}{x}, \\ v = \sin x + \cos y. \end{cases}$

Γύρω από ποια σημεία $(x_0, y_0)$ με $x_0 \neq 0$ μπορούμε να επιλύσουμε το σύστημα αυτό ως προς $(x,y)$ κατά μοναδικό τρόπο;

**Θέμα 8. [1.5]** Έστω $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ με $\displaystyle\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \frac{\bar{f}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} = \bar{0}$.
Δείξτε ότι $D\bar{f}(\bar{x}_0) = O \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

**Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας! ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!**